U chap: Résolution numerique d'un systeme d'equations linéaires

un systeme lineaire $(\mathcal{E})$ a m équation où $m \in \mathbb{N}^*$ et à $m \in \mathbb{N}^*$ inconnue est un systeme de la forme

$$(\mathcal{E}): \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 & (Eq1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mm}x_m = b_m & (Eqm) \end{cases}$$

$(\mathcal{E})$ sur la forme d'un systeme d'equations lineaires

Dans la pratique un systeme est souvent représenté sous forme matricielle qui est la suivante:

$$(\mathcal{E}): \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mm} \end{pmatrix}}_{A \in M_{m,m}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{X \in M_{m,1} = \mathbb{R}^m} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{b \in M_{m,1} = \mathbb{R}^m}$$

$(\mathcal{E}): AX = b$.

A: matrice de coefficients

b: second membre.

X: vecteur d'inconnue

Resoudre un systeme lineaire $(\mathcal{E})$ consiste à déterminer X.

(Déterminer les composantes x_i à partir de A et B qui sont connues

on cherche à déterminer les composante de x qui vérifie en même temps les contraites.

$\forall i = 1 \dots m$

$a_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}$: la ième colonne de la matrice A $\in \mathbb{R}^m$.

une écriture très intéressante de $(\mathcal{E})$ est donné par

$(\mathcal{E}): x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b$

$\sum_{k=1}^{m} x_k \cdot a_k = b$: combinaison linéaire

x_k : scalaire

a_k : vecteur (espace engendré par le vecteur colonne de a_k)

la question initiale est de resoudre $(\mathcal{E})$: c'est de déterminer X c'est de déterminer les composants de X

cette même question peut être dire d'une autre façons.

(b s'écrit-elle comme une combinaison linéaire de vecteurs colonne de A)

Scanned with CamScanner

$(b \in \mathbb{R}^m)$ $\dim(\mathbb{R}^m) = m$.

$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k \in \text{vect}(a_1, \dots a_m)$

$\dim(\text{vect}(a_1, \dots, a_m)) \leqslant m$

* si $m > n$: nbre des contraintes linéairement indép
  $>$ nbre des inconnues.
  ⇒ système surdéterminé
  ⇒ pas de solut°
  $S_{\mathbb{R}^m} = \emptyset$

* si $m \leqslant n$ on distingue 2 sous cas
  nbre d'équa m : ① $m < n$
  ② $m = n$

① $m < n$: nombre des contraintes $<$ nbre inconnue
  ⇒ système sous déterminé
  ⇒ infinité de solution

② $m = n$ Dans ce cas on a 2 possibilité
  • les n vecteurs colonnes de A forme une base de $\mathbb{R}^m$ à ce moment on a une unicité de solution.
  • si les n vecteurs colonnes de A ne forme pas une base.
  ↳ pas de solution

Rque :
Avant de étudier le nombre de solution on doit se ramener au système réduit qu'est obtenu en supprimant la redondance d'équations

Dans le cas où $n = m$: nbre d'equations linéairement indépendant on a une unicité de solutions

EX :

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_2 + 4x_2 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

1) Ecrire les système sous forme matricial.

2) Discuter le nbre de solu

Scanned with CamScanner

①

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $m=3$ $m=2$ $rg(A,b)$

$(A,b) = M_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_3 \leftarrow L_3 - (2L_1 + L_2)$

$rg(A,b) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 2$

$\Rightarrow$ l'éq (3) s'écrit $2 \times eq(1) + eq(2)$.

$\Rightarrow$ redondance à éliminer.

$m > m$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$m = n = rg(A,b) = 2$.

Donc unique solution.

2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$m = 2$ $m < n$

$n = 3$

système sous déterminé

$\Rightarrow$ infinité de solut°

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$m = n = 2$.

le système est réduit mais les vecteurs de A ne forment pas une base $\Rightarrow$ pas de solution.

②

4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $m=2$ $n=2$.

$rg(A,b) = 2 = n = m$

Donc unicité de solution

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $m=2$ $n=2$.

$rg(A,b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

A b $< \min(n,m)$ on peut calculer le rang ; impossible quelle matrice pas nécessaire carrée

$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ① ② $= 1$

le système n'est pas réduit

• le système réduit

$(1\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1)$

$m = 1$

$m = 2 \Rightarrow$ le système est sous déterminé

$\Rightarrow \exists$ infinité de soluti°

• Théorème ($m = n$)

soit (E) $Ax = b$ un système tel que $m = n$ alors les 4 propriétés suivantes sont équivalentes

(a) quelque soit $b \in \mathbb{R}^n$ le système E admet une unique solution x.

(b) la matrice A est inversible ($\det A \neq 0$)

(c) le système homogène $(E)'$ $AX = 0$

Scanned with CamScanner

5)

associer à E admet le vecteur nul comme solution évidente

④- $rg(A) = m$ A : matrice de rg plein

Rq :
Dm a : "a" → "b"
non "a" → non "b"
si a équivalente à b.

on utilise le théorème précédent pour vérifier l'existance et l'unicité de solution pour un système (E) ou le contraire on vérifiant la propriété le plus facile à calculer.

I- Méthode de Résolution — Directe

a- Méthode cramer:

soit (E) : $AX = b$ un système linéaire de taille m avec le $\det(A) \neq 0$ alors $\forall i \in [1..m]$ x_i est donné par :

$$\forall j = 1..m$$

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

avec A_j est obtenu à partir de la matrice A en remplaçant la colonne i par le vecteur b

Ex :

$$(E)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

1) Forme matricielle.
2) Vérifier si (E) admet unicité
3) si oui résoudre par Cramer

1)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$m = m = 3$.

2)
$$\det(A) = \sum_{i \text{ ou } j} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

$$\begin{cases} i \text{ ou } j \text{ fixe} \\ \text{si } i \text{ fixe} \to j = 1..m \\ \text{si } j \text{ fixe} \to i = 1..n \end{cases}$$

avec A_{ij} obtenu à partir de A on supprime la ligne i et la colonne j

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(1-2) - (-1+2)$$
$$= 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

⇒ on conclut que le système (E) admet une unique solution

Scanned with CamScanner

3)

$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$

$\Rightarrow \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 + (1-2) + 2(-1+2)$

$= -1 + 2 = 1.$

$x_1 = 1.$

$\Rightarrow \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$

$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$

$= (1-2) - 2(-1-4) - 1(1+2)$

$= -1 - 2 \times -5 - 3$

$= -4 + 10 = 6.$

$x_2 = 6.$

$\Rightarrow \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= (-2+1) - 2(-2-1) - 1(1+1)$

$= -1 - 2(-3) - 2$

$= -1 + 6 - 2 = 3$

conclusion

$X \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$

b - Méthode de Gauss à pivot simple

soit $E : AX = b$ un système linéaire de taille n

la résolution par Gauss à pivot simple se déroule en 2 étapes :

une 1ère étape consiste à transformer le système E en un système équivalent

$(E') : A'X = b'$

avec A' : est une matrice triangulaire (inférieur ou supérieur au choix).

l'étape s'appelle étape de élimination ou étape de triangulisation

une fois on a obtenu le système E' on passe à l'étape 2 qui est une étape de résolution qui permet d'obtenir X on respectons un sens de résolution de $(x_1 \rightarrow x_n)$ si c'est une matrice (A') triangulaire inférieur

et de $(x_n \rightarrow x_1)$ si la matrice (A') est triangulaire supérieur.

Scanned with CamScanner

Exercice:

1) Construire le système précédent transformer (E) en un système équivalent (E') un matrice triangulaire supérieur

2) Calculer $\det(A')$

3) Resoudre A'

reponse:

$$(E)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 & L_1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 & L_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0 & L_3 \end{cases}$$

itération $i=1$, on cherche à mettre 0 les coefficients de x_i dans la L_2 et L_3. pour cela les lignes uniquement.

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$.

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

le système devient:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$i=2$ on cherche à mettre à 0 les coefficients de x_2 dans

$L_3 \leftarrow L_3$.

$\det(A') = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$.

3) Resolution

$x_3 = 3$.

$x_2 = -3 + 3x_3 = 6$.

$x_1 = 1 + x_2 - 2x_3 = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

* Etape d'élimination

Dans l'étape d'élimination on transforme A et b en A' et b'

avec A' est une matrice triangulaire le processus d'élimination est un processus iterative.

Pour un système de taille n on a besoin de $(n-1)$ iteration au début d'une iteration i donné $[i = (1 \cdots, n-1)]$.

on commence par désigner le pivot qui est le coefficient a_{ii} de la matrice A

si le pivot est non nul.

le traitement consiste à éliminer les coefficient de la matrice A qui se situe sur la colonne n°i entre la ligne i+1 à n pour cela on utilise l'operation sur ligne uniquement pour annuler un coeff. de la colonne i qui se trouve

sur la ligne j

$(L_j : i+1 \to m)$ on fait l'opération suivante :

pivot = a_{ii}

$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$

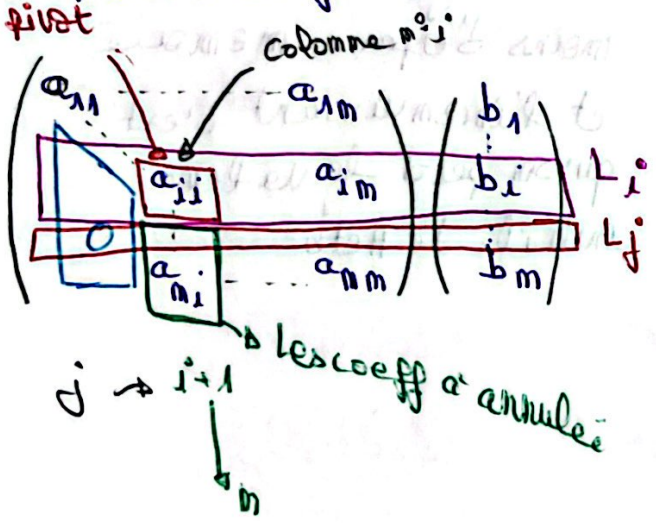
Rq :

L_i : c'est la $i^{ème}$ ligne de la matrice $(A,b) : (a_{i1} \dots a_{in}, b_i)$

L_j : c'est la $j^{ème}$ ligne de la matrice $(A,b) : (a_{j1} \dots a_{jn}, b_j)$

Au début d'une itération i (de 1 à n-1)

A et b sont de la forme :



la même opération effectuer sur A doit être effectuer sur b au même temps

nomalisé

Exercice

Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir A' et b' à partir de A et b avec A est une matrice de taille n et A' est une matrice triangulaire supérieur par la méthode de pivot simple.

réponse :

① Donne le nom de notre algorithme

Vs d'entrée

Vs de sortie

Algorithme Pivot de Gauss simple

Entrées $A \in M_{n,n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Sorties $A' \in M_n$, $b' \in \mathbb{R}^n$

Début :

pour i de 1 à (n-1) faire

pivot ← a_{ii}

si (pivot == 0) alors :

Afficher ("Impossible d'appliquer la Méthode")

exit

fin si

pour j de i+1 à n faire :

$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$

Fin pour.

bonus : calculer le det de A

Det = 1

pour i de 1 à n faire

Det ← Det × a_{ii}

fin pour

Afficher (le déterminant de A est ", det);

A' ← A

Scanned with CamScanner

b' ← b.
retourner (A';b')

Fin

l'étape 2 de l'algorithme consiste à résoudre le système E' obtenu. A'X = b' avec A' triangulaire

Exercice

soit A'X = b' avec A' est une matrice triangulaire supérieur

1) écrire la forme générale matricielle de E'

2) écrire E' sous la forme de système d'équation (1 → n).

3) à partir de chaque équation j exprimer x_j = ? en fonction d'autres variables. ainsi que les conditions de calcule

4) Proposer une méthode permettant de calculer. les coefficients de X, indication: le calcul se fait coefficient par coefficient premier par quel coefficient initialisé et le sens dans lequel on doit procéder ainsi que la formule.

5) traduire le travail en un algorithme qui permet d'obtenir X avec A et b avec

A triangulaire sup.

Remarque:

Pour obtenir le resultat de la transformation on a 2 posibilités

1ère: Déclarer A' et b' different de A et b lequel on fait tout le travail.

2ème posibilité. c'est de travaille directement sur A et b l'avantage est d'utiliser moins d'espace mémoire et l'inconvinient c'est qu'on perd la valeur initiale de A et b.

Scanned with CamScanner

1) réponse :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ 0\,x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ 0\,x_1 + 0\,x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m = b_3 \\ \vdots \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m) \\ a_{22}x_2 = b_2 - (a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m) \\ \vdots \\ a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

Si pour tout $i : 1 \to m$ $a_i \neq 0$.

Sens de calcul

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}\left[(b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)\right] \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}\left[(b_2 - (a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m)\right] \\ \vdots \\ x_m = \frac{1}{a_{mm}} b_m \end{cases}$$

on doit commencer par calculer x_m (initialement).

$$x_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$$

ensuite pour i de $m-1$ à 1 (pas $= -1$)

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(\left[b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} + \cdots a_{im}x_m\right]\right.$$

$$= \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j\right.$$

Initialisation $x_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$.

Pour i de $m-1$ à 1 (pas $= -1$)

$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j\right)$

5) Algorithme résolution système à matrice triangulaire.

entrées : matrice $A \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

sorties : $X \in \mathbb{R}^m$

début.

$x_m \leftarrow \frac{b_m}{a_{mm}}$.

pour i de $(m-1)$ à 1 (pas $= -1$)

$x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}x_j\right.$

fin pour

retourner (X)

fin

Scanned with CamScanner

c - Gauss à pivot partielle

Dans le but d'éviter le blocage de l'algorithme de pivot gauss simple (lorsque le pivot est nulle) l'algorithme de Gauss à pivot partiel consiste à insérer au début de chaque iteration i une étape de recherche de pivot :

au debut de chaque iteration i ($i : 1 \rightarrow m-1$) on a parcouru la colomne i de la ligne i jusqu'à la ligne n

En cherchant le coefficient le plus grand en valeur absolue se posant que ~~le coeff.~~ pour à la ligne k et à la colomne i

Si $k = i$:
pas de permutation à faire

Si $k \neq i$:
à ce moment il faut ramener le coefficient a_{ki} à la position du pivot qui (i,i) pour cela on permute la ligne i avec la ligne k.

$$L_i \rightleftharpoons L_k$$

et on continue l'élimination comme dans l'algorithme de gauss à pivot simple.

Rq :
la permutation de ligne doit être effectuer simultanement sur A et b c'est à dire que la permutation de ligne a des consequences sur A et b par contre X reste inchangée

pour programmer ça il faut créer une fonction de recherche de pivot partiel qui permet de retourner un entier k tel que

$$|a_{ki}| = \max_{j=i..n} \{|a_{ji}|\}$$

Ecrire la fonction de recherche à pivot partiel :

Algorithme Recherche de pivot partielle :
Entrées $A \in M_n$, $i \in [1, n-1]$.
sorties : $k \in [i..n]$
début :
    $k \leftarrow i$
    pour j de i+1 à n faire
        si ($|a_{ki}| < |a_{ji}|$) alors
            $k \leftarrow j$
        fin si
    fin pour
    retourner (k)
fin

Algorithme de pivot partiel:

Algo Elimination gauss pivot partiel
Entrée $A \in M_m$, $b \in \mathbb{R}^m$
Sortie $A \in M_m$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Pour i de 1 à m-1 faire
  k ← Recherche pivot partielle (A, i)
  Si (k != i) alors
    $L_k \rightleftharpoons L_i$
  fin si
  pivot ← a_{ii}
  si (pivot == 0) alors
    { "pivot NULL la méthode n'est pas applicable"
    exit
    }.
  fin si
  Pour j de i+1 à m faire
    $L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$
  fin pour
fin pour.
retourner (A, b).
fin

Application.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

1) Former matricielle
2) Faire tourner l'algo sur l'expl.
3) Donner $AX = b$ après élimination
4) Résoudre.

réponse:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) $m = 3 \Rightarrow$ il faut 2 itération pour transformer le système.

* itération $i = 1$.
on va chercher dans la colonne 1 de ligne 1 → 3.
la fonction de recherche pivot va retourner $k = 2$.
$k \neq 1$ ($k = 2, i = 1$)
il faut permuter la ligne 2 avec la ligne 1
$L_1 \rightleftharpoons L_2$.

le système après permutation est

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$-1 = \boxed{1} - (+2)$

Scanned with CamScanner

pivot $= 2 \neq 0$.

- élimination de la ligne 2 et la ligne 3 ($j = 2, j = 3$)

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$

le système après élimination

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

* itération $i = 2$:

on cherche dans la colonne 2 aux ligne 2 et ligne 3

la fonction de recherche à pivot partielle retourne $k = 2$.

$i = k$ pas de permutation

pivot $= -\frac{1}{2} \neq 0$.

élimination:

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

le système après élimination.

de sous à pivot partielle:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4)

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ -\frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{2} x_3 = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

$2x_1 - 6 + 3 = -1$

$-3 = -1$

$= +2/2$

Scanned with CamScanner

si $\forall i = 1..m \quad \det(A_i) \neq 0$

4 - Gauss à pivot totale :

Dans le but d'éviter une valeur faible ou nulle la méthode de gauss à pivot totale consiste à insérer au début à chaque itération i une étape de recherche de pivot la recherche de pivot sera effectuer dans une zone plus large que celle de la méthode de gauss à pivot partielle.

la zone de recherche dans le cas de gauss à pivot totale à une itération i donné c'est le point le sous matrice de A en parcourant de la ligne i jusqu'à ligne m et de la colonne i jusqu'à la colonne m (intersection de ligne avec la colonne.

la fonction recherche de pivot totale permet de retourner un couple d'entiers k et l

k : nbre de ligne
l : " de colonne.

si $[(i,i) \neq (k,l)]$ (7)

il faut ramener a_{kl} à la position de pivot (i,i) en utilisant la permutation de ligne et de colonne

* si $i \neq k$ alors $L_k \rightleftharpoons L_i$ (ligne)
* si $(i \neq l)$ alors $C_i \rightleftharpoons C_l$ (colonne)

$$|a_{kl}| = \max_{\substack{j=i..m \\ p=i..m}} \{|a_{jp}|\}$$

Rq :

- la permutation de ligne à des conséquences A et b et X reste inchangé

la permutation de colonne a des conséquences sur A et X et b reste inchangé

Rappelons que un système linéaire s'écrit sous la forme :

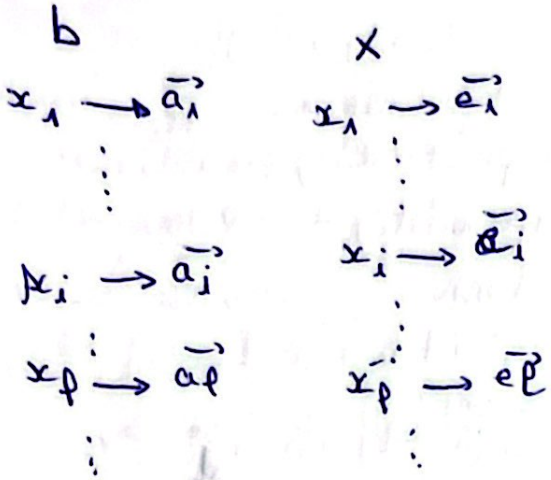
$$(\mathcal{E}) : b = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{a_i}$$

$\vec{a_i}$: vecteur colonne de A.

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e_i}$$

$\vec{e_i}$: vecteur colonne de la base canonique de $\mathbb{R}^m$

Scanned with CamScanner



Exercice :

On va reprendre l'exemple précédent et on va le résoudre avec la méthode de Gauss à pivot totale.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

1) Système sous forme matricielle.

T | 1 | 2 | 3 |

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

① Identifier n : $n = 3$.

② nbre d'itération $(n-1)$

il faut $\underset{j=1,2}{2}$ *iteration pour transformer A en une matrice triangulaire supérieur

* iteration $i = 1$

on a 2 façon pour lire la matrice

→ lecteur ligne par ligne.

→ " colonne par colonne

Par défaut on lit ligne par ligne.

Le pivot dépend de façon de lire

↘ > ou >

lecteur ligne par ligne (<).

- la fonction Recherche de Pivot retourne $(k, l) = (1, 3)$.

- $(i = 1) = (k = 1)$ pas de permutation de ligne.

- $(i = 1) \neq (l = 3)$: permutation de la c_1 par c_3.

le système après la permutation de colonne.

T | 3 | 2 | 1 |

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pivot = $2 \neq 0$

Elimination :

$j = 2$, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$.

$j = 3$, $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$.

le système après élimination

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

* iteration $i = 2$.

la fonction Recherche de pivot totale

Retourne $(k, l) = (2, 3)$.

$(i = 2) = (k = 2)$. Pas de permutation de ligne.

- $(i = 2) \neq (l = 3)$: $c_2 \rightleftharpoons c_3$.

T | 3 | 1 | 2 |

Scanned with CamScanner

le système après permutation :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

pivot $= 3/2 \neq 0$.

Elimination :

$j = 3 : L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_2$.

système après élimination

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b}$$

T | 3 | 1 | 2 |

$$\begin{cases} x_2 = 6. \\ \frac{3}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 = -3/2 \Rightarrow x_1 = 1. \\ 2x_3 + x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 3. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(8)

Pour rendre la tâche de la programmation plus facile il est préférable, de utiliser un tableau d'entiers T qui contient comme initialisation $T[i] = i \quad \forall i = 1 \ldots n$

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_{T[i]}$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_{T[i]}$$

Dans élimination, si à une itération i donné $i = 1, \ldots n-1$

→ on doit permuter la colonne i avec la colonne t. de matrice A

→ on doit associer au même temps la permutation de la contenu de la case i avec la case t. de Tableau T.

A la fin de l'élimination on recupère A qu'est une matrice triangulaire superieur, b et le tableau T.

on commence par résoudre le système $AY = A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = b \Rightarrow Y$ (résultat)

Pour obtenir X Résolution du système initial.

$$X = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_{T[i]}$$

Exercice Precedent avec cette Méthode (*)

Scanned with CamScanner

$$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$X = y_1 e_{T[1]} + y_2 e_{T[2]} + y_3 e_{T[3]}$.

$= y_1 \vec{e_3} + y_2 \vec{e_1} + y_3 \vec{e_2}$

$= \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Algo Elimination pivot total

Entrée A, b.

Sortie A, b, T.

Début

Pour i de 1 à m faire

| T[i] = i

Fin

Pour i de 1 à m-1 faire

(k,l) ← recherche pivot total (A, i)

si (i ≠ k) alors

{ $L_i \rightleftharpoons L_k$ }

si (j ≠ l) alors

{ $c_j \rightleftharpoons c_l$

T[j] ⇌ T[l] }

pivot ← aii

si (pivot != 0) alors

| Pour j de i+1 à m faire

| | $L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$

| | fin

| fin

Retourne (A, b, T)

Fin

Méthode L.U

le principe de la méthode L.U est décrire la matrice A de système (de taille m) comme un produit de 2 matrice L et U ai A = L.U avec L est une matrice triangulaire ayant des 1 sur les diagonales.

et U est une matrice triangulaire supérieur.

(si c'est possible)

Scanned with CamScanner

Si A s'écrit de cette façon.
$A = L.U$ pour résoudre E on procède de 2 étapes on commence par poser

$y = UX$.

on obtient (E_1): $Ly = b$
on résolvant on obtient y.
sachant y connu

(E_2): $UX = y \Rightarrow$ (y) L^2.

Rq:
le système (E_1) et (E_2) sont facile à résoudre de faite que E_1 et E_2 sont deux système à matrice triangulaire

Théorème: condition nécessaire et suffisante
Soit A une matrice carrée de taille n dont toutes les sous matrices principales sont inversibles alors il existe L et U tel que

$A = LU$ avec

L est une matrice triangulaire inferieur ayant des 1 sur les diagonales.

et

U est une matrice triangulaire superieur

(9)
si $\forall i = 1..n$ $\det(A_{ii}) \neq 0$
alors $\exists L$ et U tq $A = L.U$

avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} \; 1 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n\times n}.$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ a_{i1} & & a_{ii} \end{pmatrix}$$

$A_{1\times 1} = (a_{11})$
$\vdots$
$A_{nn} = A$

Exercice:
Vérifier si la matrice de l'exemple précédent admet une décomposition L.U
réponse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ la Matrice A de taille 3.

$A_{11} = (1) \Rightarrow \det(1) = 1 \neq 0$
donc A_{11} est inversible

$A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{22}) = 1 \neq 0$.
donc A_{22} est inversible.

$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_{33}) = 1 \neq 0$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow \det(A_{33}) = 1 \neq 0 \Rightarrow A_{33}$ est inversible.

$\Rightarrow$ tous les sous-matrices principales sont inversibles donc A admet une décomposition L.U

Remarque:

si une matrice A de taille n admet une factorisation LU alors $\det(A) = \det(L) \times \det(U)$

$$\det(A) = \det(LU)$$
$$= \det(L) \cdot \det(U)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} U_{ii}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$$

Pour déterminer L et U on peut utiliser 2 méthodes.

* Eliminiation de Gauss à pivot simple : 1ère Méthode.

la transformation d'une matrice A de taille n en une matrice triangulaire supérieur par la méthode de gauss à pivot simple permet d'obtenir la matrice U
Ensuite sachant A et U (connus) on peut déterminer les coefficients de L par identification et en utilisant la formule de produit matricielle.

Si $C = A * B$ avec $A \in M_{m \times m}$, $B \in M_{m \times p}$, $C \in M_{m \times p}$

$\forall i = 1 \dots m \quad \forall j = 1 \dots p$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$= <$ ième ligne de A ; jème colonne de B $>$ Produit scalaire

Exemple:
considérant la matrice précédente déterminer L et U

réponse:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$n = 3 \Rightarrow$ 2 itérations

o itération $i = 1$:

Elimination:

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

matrice après élimination

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

sachant A et U

$$L.U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ l_{21} & -l_{21}+1 & 2l_{21}-3 \\ l_{31} & -l_{31}+l_{32} & 2l_{31}-3l_{32}+1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Par identification :

$$\begin{cases} l_{21} = 2 \\ l_{31} = -1 \\ -l_{31}+l_{32} = 1 \Rightarrow l_{32} = 1 + l_{31} = 0 \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* Méthode de Crout

cette Méthode consiste à écrire $L.U = A$ d'une manière formelle et en utilisant la formule de produit matricielle on procède à une identification ligne par ligne et colonne par colonne, c'est comme identifier en entier $(L_1 \cdots L_n)$

$A = L.U$

c'est $\forall i = 1 \cdots m \quad \forall j = 1 \cdots n$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} l_{ik} u_{kj}$$

$= <$ i ème ligne de L_i ; j ème colonne de $U >$

$$= <(l_{i1} \cdots l_{i,i-1}\ 1\ 0 \cdots 0) \cdot \begin{pmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} \cdot u_{kj}$$

Identification :

* ligne $i = 1$:

Pas d'inconnue de la ligne 1 de L $(1\ 0 \cdots 0)$.

- colonne j de 1 à m

$(\min(1,j) = 1)$

$$a_{1j} = \sum_{k=1}^{1} l_{11} u_{1j} = l_{11} \cdot u_{1j}$$

($l_{11} = 1$)

$$\Rightarrow \boxed{u_{1j} = a_{1j}}$$

$(u_{11}\ u_{12} \cdots u_{1m})$ 1er ligne de U.

supposons qu'on connait les lignes de 1 à "i-1" de L et de U, cherchons à déterminer la ligne i de L et de U

$(i = 2 \cdots m)$

connue par hyp $\begin{cases} 1\ 0 \cdots 0 \\ l_{21}\ 1 \cdots 0 \\ \vdots \\ l_{i-1,1} \cdots 1 \end{cases}$ $\begin{matrix} u_{11} \cdots u_{1m} \\ \ddots \\ u_{i-1,i-1} \cdots u_{i-1,n} \\ u_{ii} \cdots u_{in} \end{matrix}$

à déterminer $l_{i1} \cdots l_{i,i-1}\ 1\ 0 \cdots$

Scanned with CamScanner

*Ligne i (de 2 à m) fixe :

Les lignes de 1 à j-1 sont connues par hyp

- colonne j = 1 $\quad \min(i,1) = 1$. Connu

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} \cdot u_{k1} = l_{i1} \cdot u_{11}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{i1} = a_{j1} / u_{11}} \quad \text{à condition } u_{11} \neq 0$$

- colonne j (de 2 à i-1) $\min(i,j) = j$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} u_{kj}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}} + l_{ij} u_{jj}$$

connu par hyp.

$$\Rightarrow l_{ij} = \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{ik} u_{kj})\right] / u_{jj}$$

Algo crout

Entrés $A \in M_{m \times m}$

Sortie $L \in M_{mm}, U \in M_{mm}$

Début /* Initialisation */

$L \leftarrow I_{m \times m}$

$U \leftarrow 0_{m \times m}$

/* 1er ligne */

Pour j de 1 à m faire

| $u_{1j} \leftarrow a_{1j}$

Fin

Pour i de 2 à m faire

| $l_{i1} \leftarrow a_{i1} / u_{11}$

| Pour j de 2 à "i-1" faire

| | $l_{ij} \leftarrow (a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}) / u_{jj}$

| Fin

| Pour j de i à m faire

| | $u_{ij} \leftarrow a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}$

| Fin

Fin

Retourner (L, U)

Fin

Exercice :

Appliquer l'algorithme sur l'exemple précédent :

réponse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$m = 3$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour j de 1 à 3 faire

$u_{1j} \leftarrow a_{1j}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i =

Scanned with CamScanner

13

* $i = 2$:

$$l_{21} \leftarrow \frac{a_{21}}{u_{11}} \Rightarrow l_{21} \leftarrow \frac{2}{1}$$

→ $j = 2$.

$$u_{22} \leftarrow a_{22} - \sum_{k=1}^{1} l_{2k} u_{k2}.$$

$$\Rightarrow u_{22} \leftarrow -1 - 2 \times -1$$

$$\Rightarrow u_{22} \leftarrow -1 + 2 = 1$$

→ $j = 3$

$$u_{23} \leftarrow a_{23} - \sum_{k=1}^{2} l_{2k} u_{k3}$$

$$u_{23} \leftarrow +1 - 2 \times 2.$$

$$u_{23} \leftarrow -3$$

* $i = 3$

→ $j = 1$

$$l_{31} \leftarrow \frac{a_{31}}{u_{11}} : l_{31} \leftarrow -1$$

→ $j = 2$.

$$l_{32} \leftarrow a_{32} - \sum_{k=1}^{1} l_{3k} u_{k2} / u_{22}$$

$$l_{32} \leftarrow a_{31} - l_{31} u_{12} / u_{22}$$

$$\leftarrow 1 - (-1 \times 1) / 1.$$

$$l_{32} \leftarrow 0.$$

→ $j = 3$:

$$u_{33} \leftarrow \left(a_{33} - \sum_{k=1}^{2} l_{3k} u_{k3}\right)$$

$$\leftarrow a_{33} - (l_{31} u_{13} + l_{32} u_{23})$$

$$\leftarrow -1 - (-1 \times 2 + 0 \times 1)$$

$$\leftarrow (-1 - (-2))$$

$$u_{33} \leftarrow 1$$

11

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résolution de système :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$n = 3$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on pose $y = U.X$

le système (E_2) $L.y = b$.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = -1 \\ -y_1 + y_3 = 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 - 2y_1 \\ y_3 = 2 + y_1 \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -3 \\ y_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow Y \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

le système (E_2)

$U.X = Y \quad ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 6 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

cholesky :

$$A = L\,L^T = R^T R$$

$$L = R^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ l_{m1} & \cdots & \cdots & l_{mm} \end{pmatrix}$$

la factorisation de cholesky.
consiste à écrire une matrice A comme un produit d'une matrice LX son transposé avec L est une matrice triangulaire inférieur de taille m
pour résoudre (E): $AX = b$.
si admet cette décomposition se fait en 2 étapes
on pose $Y = L^T . X$
on obtient le système (E_1)
$LY = b$
on résolvant (E_1), on obtient Y comme sachant Y et L on resolue.
le système (E_2) : $L^T . X = Y$
(E_1) et (E_2) sont faciles à résoudre or ils sont des système à matrice triangulaire

Scanned with CamScanner

retourner L.

13

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 5-1 & 2 \\ 2 & 5-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5-1 \end{vmatrix}$$

Théorème 6

soit A une matrice carré de taille n

si A vérifie 2 conditions

i : condition 1 B

A est symétrique. $(A = A^T)$

ii - condition 2 :

A est définie positive.

q.q soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$^tX \cdot AX > 0 \Rightarrow {}^tXAX > 0$

alors

[A s'écrit]

il $\exists$ L tq L est une matrice triangulaire inférieur de taille n

tq $A = L \cdot L^T$

et $\det A = \det L \cdot \det(L^T)$

$$= \prod_{i=1}^{n} (l_{ii})^2$$

si on choisit toute l_{ij} strict positives.

alors la matrice L est unique.

Rq 6

A est définie positive ssi ssi spectre de $A \subset \mathbb{R}_+^*$ (l'ensemble des valeur propre

12

Détermination de L à partir de A 6

En utilisant la formule de produit matricielle et en procédant à un identification colonne et ligne par ligne par colonne

Ecrire Algorithme qui détermine L à partir de A :

$$A = L \cdot L^T$$

$$\Leftrightarrow \forall i = 1..n \quad \forall j = 1..n$$

$a_{ij} =$ < i ème ligne de L . j ème colonne de L^T >

$$= < (l_{i1}\ l_{i2} \dots l_{ij}\ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} l_{j1} \\ l_{j2} \\ l_{j3} \\ \vdots \\ l_{jj} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} >$$

$$= \sum_{k=1}^{n} l_{ik} l_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} l_{ik} l_{jk}$$

expl :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & 0 \\ \vdots & & & \\ l_{i1} & & l_{ij} & \\ l_{m1} & & \dots & l_{mm} \end{pmatrix} \leftarrow \text{ligne } i$$

$$L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & & & l_{m1} \\ & l_{22} & & \vdots \\ & 0 & & l_{ij} \\ & & & l_{mm} \end{pmatrix} \leftarrow \text{colonne } j$$

Scanned with CamScanner

Pour tout $i \in [1..m]$.

$j \in [1..m]$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(j,i)} l_{ik} l_{jk}$$

* $j = 1$
  - $i = 1$

$$a_{11} = (l_{11})^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

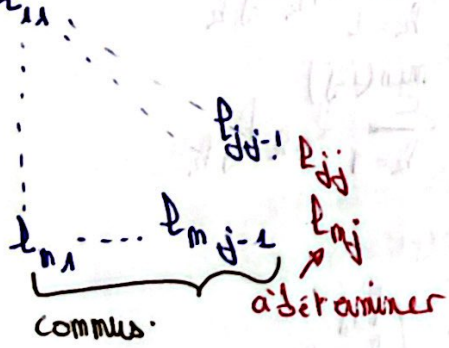
$a_{11} > 0$.

  - $i \in [2..m]$

$$a_{i1} = \sum_{k=1}^{1} l_{ik} l_{jk} = l_{i1} l_{11}.$$

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}.$$

Supposons que les coeff. de colonne de $1 \dots j-1$ sont connus, cherchons à déterminer les coeff de colonne j



* $j \in [2..n]$
  - $i = j$

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^{j} (l_{jk})^2$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}_{\text{connu}} + (l_{jj})^2$$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}$$

  - $i \in [j+1..m]$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} l_{ik} l_{jk}$$

$$= \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} + l_{ij} \times l_{jj}$$

connu (sum) — ? — connu (l_{jj}).

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right]$$

Algo cholesky:

Entrée $A \in M_{n \times m}$

sortie $L \in M_{n \times m}$.

Début:

$L \leftarrow O_{n \times m}$ $\quad : \mathbb{R}_+^*$

/* 1ère colonne */

$l_{11} \leftarrow \sqrt{a_{11}}$

Pour i de 2 à m faire

| $l_{i1} \leftarrow \frac{a_{i1}}{l_{11}}$

Fin

/* colonne j de 2 à m */

Pour j de 2 à m faire

| /* 1er coeff */
| $l_{jj} \leftarrow \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{jk})^2}$
| Pour i de $j-1$ à m faire
| | $l_{ij} \leftarrow \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) / l_{jj}$
| fin
fin

Scanned with CamScanner

retourner L.

Fin

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix} ; b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Vérifier si $(\mathcal{E}) : AX = b$, admet une solution.

2) Vérifier si A admet une factorisation de cholesky.

3) Déterminer L par l'algo

4) Résoudre en utilisant L

réponse.

1) $n = m = 3$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$= 21 - 1 - 16 = 4 \neq 0$.

$\Rightarrow$ A est inversible et par suite le système $(\mathcal{E})$ admet une unique solution.

2) • $A = {}^tA \Leftrightarrow$ A est symétrique (cond 1 vérifiée)

* $\det(A - \lambda I_3) = \chi$

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

$= (1-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 4] - [-(5-\lambda) + 4] - 2[-2 + 2(5-\lambda)]$

$= (1-\lambda)[25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4] - 1 + \lambda + 4 - 20 + 4\lambda$.

$= -\lambda^3 + 11\lambda^2 - 26\lambda + 4$.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0,165 \\ \lambda_2 = 7,68 \\ \lambda_3 = 3,15 \end{cases}$$

$Sp(A) = \{0,165 ; 7,68 ; 3,15\} \subseteq \mathbb{R}_+^*$

cond 2 vérifiée

$\Rightarrow$ A est définie positive

cond 1 et cond 2 $\Rightarrow$ A admet une factorisation de cholesky

3) $m = 3 : L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\rightarrow j = 1$

- $i = 1$

$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 1$

- $i = 2$

$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = -1$

- $i = 3$

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = -2$.

Scanned with CamScanner

* $j = 2$:

- $i = 2$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = 2.$$

- $i = 3$

$$l_{32} = (a_{32} - l_{31} l_{21}) / l_{22}$$
$$= 0.$$

* $j = 3$:

- $i = 3$:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)}$$
$$= 1$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on pose $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$(E_1) : Ly = b$.

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ -y_1 + 2y_2 = 2. \\ -2y_1 + y_3 = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 3/2. \\ y_3 = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$(E_2) : L^T \cdot X = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = y_1. \\ 2x_2 = y_2. \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_2 = 3/2. \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = \frac{3}{4} \\ x_1 = 1 + \frac{3}{4} + 2 \\ \quad = 3 + \frac{3}{4} = \frac{12+3}{4} = \frac{15}{4}. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{15}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Théorème :

Méthode Q.R:

$A = Q.R$

$Q \in M_{m\times m}$ orthogonale ($^tQ = Q^{-1}$)

$R \in M_{m\times m}$ triang sup

$AX = b = QRX \Rightarrow {}^tQ.Q.RX = {}^tQ.b = b'$

$\Rightarrow (\mathcal{E}')\quad RX = b'$

la Méthode QR permet d'écrire A comme un produit de 2 matrices Q et R avec Q est une matrice orthogonale de taille m ($Q^{-1} = {}^tQ$) et R une matrice triangulaire supérieur si A s'écrit Q.R alors pour résoudre (E) il suffit de résoudre le système (E') : $RX = b'$ avec $b' = {}^tQ.b$

le système (E') est facile à résoudre car c'est un système à matrice triangulaire

Il est toujours possible d'écrire A comme produit Q.R (pas de condition).

on a unicité de Q et de R si A est inversible

pour déterminer Q et R il existe différentes Méthodes:

la 1ère Méthode Hou

la 2ème Méthode Givens

la 3ème Méthode Braham Shmidt

2/ Gram Schmidt :

supposons que $A = Q.R$ / A : matrice de taille m.

$A = [c_1 c_2 \dots c_m]$

on pose :

$u_1 = c_1$, $d_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$

$u_2 = c_2 - \langle c_2 . d_1 \rangle d_1$, $d_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|}$

$\vdots$

$u_k = c_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle c_k . d_j \rangle d_j$;

$d_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$

$Q = [d_1 d_2 \dots d_m]$

$$R = \begin{pmatrix} \langle c_1 d_1 \rangle & \langle c_2 d_1 \rangle & \langle c_3 d_1 \rangle & \dots & \langle c_m d_1 \rangle \\ & \langle c_2 d_2 \rangle & \langle c_3 d_2 \rangle & \dots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \langle c_n d_n \rangle \end{pmatrix}$$

Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1)

$$A = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$H = I_m - 2 v . v^T$

$= I_m - 2 \frac{u u^T}{\|u\|^2}$

$\|u\|^2 = \langle u . u \rangle$

$= \langle x_1 - \alpha e_1 , x_1 - \alpha e_1 \rangle$

$= \langle x_1 , x_1 \rangle - 2\alpha \langle e_1 , e_1 \rangle + \alpha^2 \langle e_1 , e_1 \rangle$

$= \alpha^2 - 2\alpha a_{11} + \alpha^2$

$= 2\alpha^2 - 2\alpha a_{11}$

$= 2\alpha (\alpha - a_{11})$

réponse :

$u_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $d_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}$

$\sqrt{16 + 4 + 16}$

$= \sqrt{36} = 6$

$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} +3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$d_2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$u_3 = c_3 - \langle c_3 d_1 \rangle d_1 - \langle c_3 d_2 \rangle$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} -$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

1

Scanned with CamScanner

$J_I x^{(k)} + b$

Théorème :

4 propriétés suivant..

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \\ 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} ; \quad \|u_3\| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9}}$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{36}$$

$$= \frac{6}{3} = 2.$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$AX = b \iff QRX = b.$

$\iff RX = {}^tQ\, b = b'$

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = 4/3 \\ 9x_2 + x_3 = 1/3 \\ 2x_3 = 8/3 \end{cases}$$

(17)(3)

$$x = \begin{pmatrix} -1/18 \\ -1/9 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

IIMéthode de Résolution itérative

on fait l'appel au méthode itérative lorsque n est assez important et l'inversion de A n'est sûr le principe est de se donner un $x^{(0)}$ comme initialisation et on cherche à construire une suite vectorielle $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ selon une formule de recurrence en partant de x^0 et s'assurer si la suite $(x^{(k)})$ converge vers x^* alors x^* est une solution pour E

Dans la pratique on calcule $x^{(k)}$ jusqu'à condition d'arrêt prédéfinie et on va dire que le dernier x^k calculer c'est notre x^* cherché

avec $x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Scanned with CamScanner

N_J $x^{(k)} + b$

Théorème :

les 4 propriétés suivantes sont équivalentes

i) $\lim_{k \to +\infty} B^k = O_{m \times m}$ (suite matricielle $B_k = B^k$)

ii) $\forall v \in \mathbb{R}^m$,

$\lim_{k \to +\infty} B^k . v = \vec{0}$

(suite vectorielle $v_k = B^k . v$).

iii) $\rho(B) < 1$ ↑ rayon spectral ⇒ • calcule le sp(B) • et on prend le sup • et on le compare par 1

iv) $\exists$ $|||\cdot|||$: norme matricielle subordonnée tq $|||B||| < 1$

suite → à partir

avec

$B \in M_{n \times m}$, $\rho(B) = \sup\{|\lambda_i| : \lambda_i \in sp(B)\}$

↑ rayon spectrale

$$|||B||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^m / \vec{0}} \left\{ \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \right\}$$

↑ norme vectorielle, matricielle ou induite

Théorème d'écart : dépend de $x^{(k)}$?

$x_k \xrightarrow{C.V} l \iff e_k = x_k - l \xrightarrow{C.V} \vec{0}$

Pour résoudre un système $(E) : Ax = b$

Par une méthode itérative, on va chercher à construire une suite vectorielle $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ selon la formule de récurrence suivante

Exercice

(17) (3) 16 (2)

$$\begin{cases} x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_m^{(0)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \text{ donné} \\ M . x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b \end{cases}$$

↑ k vient de la suite

$M \in M_{m \times m}$, $N \in M_{m \times m}$.

- pour pouvoir calculer $x^{(k+1)}$ à partir $M x^{(k+1)} = N x^{(k)}$ il faut que M soit inversible i/ M^{-1} existe

- $x^{(k)}$ converge vers x^*

$x^{(k+1)}$ converge vers x^*

ssi/ $(M x^{(k+1)} = N x^{(k)} + b)$

$\xrightarrow[k \to +\infty]{} M x^* = N x^* + b$

$\underbrace{(M - N)}_{A} x^* = b$

- $x^{(k+1)} = M^{-1}(N x^{(k)} + b)$

$e^{(0)} = x^{(0)} - x^*$

$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^*$

$= \underbrace{(M^{-1}(N))}_{B} e^{(0)}$

Dém :

$x^{(k+1)} = M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b .$

$x^* = M^{-1} N x^* + M^{-1} b .$

$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^*$

$= M^{-1} N x^{(k)} + M^{-1} b - x^*$

Scanned with CamScanner

$= M^{-1}N x^{(k)} + M^{-1}b - M^{-1}N x^* - M^{-1}b$

$= M^{-1}N (x^{(k)} - x^*)$

$= M^{-1}N\, e^{(k)}$

$\vdots$

$= (M^{-1}N)^k e^{(0)}$

iii) $\rho(M^{-1}N) < 1$

- Dans toute la suite chaque matrice A de taille m du système (E) sera décomposer de la façon suivante

$$A = D - (E+F)$$

$$= \begin{pmatrix} & F & \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix} \in M_{m\times m}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ -a_{m1} & -a_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -a_{m-1,m} \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

on va définir M et N à partir de D, E et F

1er Méthode : La Méthode de Jacobi

l'algorithme de Jacobi est défini d'une manière suivante :

~~[illegible]~~

$M_J = D \quad ; N_J = E+F$

$$\text{Jacobi} \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^m \text{ donné} \\ M_J x^{(k+1)} = N_J x^{(k)} + b \\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Exercice :

Donner la formule permettant de calculer les composantes du vecteur $x^{(k+1)}$ sachant les composantes du vecteur $x^{(k)}$ (par la méthode de Jacobi)

réponse :

$M_J x^{(k+1)} = D x^{(k+1)}$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{ij} x_j^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{mm} x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$N_J x^{(k)} + b$

$= (E+F) x^{(k)} + b$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & -a_{m-1,m} \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 x_1^{(k)} - a_{12} x_2^{(k)} - \cdots - a_{1m} x_m^{(k)} + b_1 \\ \vdots \\ -a_{i1} x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} - 0 x_i^{(k)} - a_{im} x_{i+1}^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ -a_{m1} x_1^{(k)} - \cdots - a_{m,m-1} x_{m-1}^{(k)} + 0 x_m^{(k)} + b_m \end{pmatrix}$$

pour tout $i = [1 \cdots m]$

$a_{ii} x_i^{(k+1)} = a_{i1} x_1^{(k)} + \cdots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} + 0 x_i^{(k)} + a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} + \cdots + a_{im} x_m^{(k)} + b_i$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)}$$

Pour tout $j = [1 \cdots m]$ si $a_{ii} \neq 0$

alors

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

Exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1/ Donner D E et F tq $A = D - (E+F)$

2/ Donner M_J et N_J (Jacobi)

3/ $\forall k \in \mathbb{N}$, Donner $x^{(k+1)}$ sous la forme d'un système d'équation.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{pmatrix}$$

4/ $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ par la méthode de Jacobi

5/ Discuter la convergence de la méthode de Jacobi

$$A = D - (E+F) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & 0 & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

1/ $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2/ $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 3x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(-2 + 2x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right) \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_1^{(0)} - 4x_2^{(0)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(1)} = -\frac{1}{4} \\ x_2^{(1)} = -\frac{1}{3} \\ x_3^{(1)} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

on a $x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 3x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(-2 + 2x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(2)} = -\frac{13}{28} \\ x_2^{(2)} = -\frac{1}{4} \\ x_3^{(2)} = \frac{15}{7} \end{cases}$$

3/ $H_J = D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$N_J = E + F = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

4/ $H_J x^{(k+1)} = N_J x^{(k)} + b$

$x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 3x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(-2 + 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)}\right) \end{cases}$$

Scanned with CamScanner

D'où $|-19| = -7/14$

$N_J X^{(k)} + b$

$= (E+F) X^{(k)} + b$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -a_{m-1,m} \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{m,m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 x_1^{(k)} - a_{12} x_2^{(k)} - \cdots - a_{1m} x_m^{(k)} + b_1 \\ \vdots \\ -a_{i1} x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} - 0 x_i^{(k)} - a_{im} x_{i+1}^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ -a_{m1} x_1^{(k)} - \cdots - a_{m,m-1} x_{m-1}^{(k)} + 0 x_m^{(k)} + b_m \end{pmatrix}$$

pour tout $i = [1..m]$

$a_{ii} x_i^{(k+1)} = -a_{i1} x_1^{(k)} - \cdots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k)} - 0 x_i^{(k)} - a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{im} x_m^{(k)} + b_i$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)}$$

Pour tout $j = [1..m]$ si $a_{ii} \neq 0$

alors

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

$= -\lambda \left(\frac{-4}{\lambda} - 2\lambda \right)$

$a \neq 1 \quad \left| \frac{-4}{\lambda} - 2\lambda \right|$

(17) (3)

Exercice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1/ Donner D E et F tq $A = D - (E+F)$

2/ Donner M_J et N_J (Jacobi)

3/ $\forall k \in \mathbb{N}$, Donner $X^{(k+1)}$ sous la forme d'un système d'equation.

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{pmatrix}$$

4/ $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ calculer $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ par la méthode de Jacobi

5/ Discuter la convergence de la méthode de Jacobi

$A = D - (E+F)$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

D'où $X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{28} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ $= -\frac{7}{14}$ $-\frac{5}{14}$ $-\frac{2}{14}$

5°/ $\frac{2}{7} - \frac{10}{28} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{7} - \frac{5}{14} + \frac{1}{2}$

$= \frac{4}{14} - \frac{5}{14} + \frac{7}{14}$

$= \frac{-1+7}{14}$

$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

polynome caractéristique

$\det M = -4 \times 7 \times 2 = -56 \neq 0$

les racines de polynôme

Donc la matrice M est inversible

- $M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

- $M^{-1}.N = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

- $\det(M^{-1}.N - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & -\lambda & \frac{1}{7} \\ -2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{7} \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{5}{4} \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{4} \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & -\lambda \\ -2 & -2 \end{vmatrix}$

$= -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{2}{7}\right) - \frac{5}{4}\left(-\frac{2}{7}\lambda + \frac{2}{7}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{7} - 2\lambda\right)$

$= -\lambda^3 + \frac{2}{7}\lambda + \frac{10}{28}\lambda - \frac{10}{28} - \frac{1}{7} - \frac{\lambda}{2}$

$= -\lambda^3 - \lambda\left(\frac{2}{7} - \frac{10}{28} + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{28} - \frac{1}{7}$

$= -\lambda^3 - \frac{6}{14}\lambda - \frac{1}{2}$.

$= -\lambda^3 - \frac{3}{7}\lambda - \frac{1}{2}$.

$\lambda = \{0,3 + 0,84i ; 0,3 - 0,84i ; 0,6\}$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{(0,3)^2 + (0,84)^2}$

$= 0,89$

$\Rightarrow \rho(M^{-1}.N) = 0,89 < 1$

$\Rightarrow$ donc la méthode est convergente.

Scanned with CamScanner

2/ Gauss - Seidel:

$M_{GS} = D - E$, $N_{GS} = F$

Ex.

Donner la formule permettant de calculer $x_i^{(k+1)}$.

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^m \\ M_{GS} X^{(k+1)} = N_{GS} X^{(k)} + b. \end{cases}$$

Rq:

l'idée de la méthode de Gauss-Seidel est d'introduire une correction c-a-d Si on cherche à calculer la $i$ème composante du nouveau vecteur $(k+1)$ $x_i^{(k+1)}$ on a nécessairement calculer les composantes de 1 jusque $(i-1)$ donc ce plus raisonnable bénéficie de l'utiliser à la place de composante $x_1^{(k)} \dots x_{i-1}^{(k)}$

réponse:

$$M_{GS} X^{(k+1)} = (D - E) \cdot X^{(k+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & & a_{ii} & \\ \vdots & & & \ddots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \; \frac{2}{7} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \; \frac{22}{7} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} + \frac{22}{7} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1^{(k+1)} \\ a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{22} x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{i1} x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{ii} x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{m1} x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{mm} x_m^{(k+1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} \frac{22}{7} \\ + \frac{88}{28} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$N_{GS} \cdot X^{(k)} + b = F \cdot X^{(k)} + b. \qquad \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{22}{28}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ & \ddots & -a_{i,i+1} & \cdots \\ & & & -a_{i,m} \\ & & & \vdots \\ & 0 & & -a_{m-1,m} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_i^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \frac{1}{3} = \frac{111}{98}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a_{12} x_2^{(k)} - \cdots - a_{1m} x_m^{(k)} + b_1 \\ \vdots \\ -a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{im} x_m^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ -a_{m-1,m} x_m^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

2/ Gauss - Seidel :

$M_{GS} = D - E$, $N_{GS} = F$

Ex.

Donner la formule permettant de calculer $x_i^{(k+1)}$.

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ M_{GS} X^{(k+1)} = N_{GS} X^{(k)} + b \end{cases}$$

Rq :

L'idée de la méthode de Gauss-Seidel est d'introduire une correction c-a-d si on cherche à calculer la $i$ème composante du nouveau vecteur $(k+1)$ $x_i^{(k+1)}$ on a nécessairement calculer les composantes de 1 jusqua $(i-1)$ donc ce plus raisonnable bénéficier de l'utiliser à la place de composante $x_1^{(k)} \dots x_{i-1}^{(k)}$

réponse :

$$M_{GS} X^{(k+1)} = (D - E) \cdot X^{(k+1)}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1^{(k+1)} \\ a_{21} x_1^{(k+1)} + a_{22} x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{ii} x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ a_{m1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{mm} x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$N_{GS} \cdot X^{(k)} + b = F \cdot X^{(k)} + b.$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1m} \\ & \ddots & & -a_{i,i+1} \dots -a_{im} \\ & & & \vdots \\ & 0 & & -a_{m-1,m} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_m^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a_{12} x_2^{(k)} - \dots - a_{1m} x_m^{(k)} + b_1 \\ \vdots \\ -a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{im} x_m^{(k)} + b_i \\ \vdots \\ -a_{m-1,m} x_m^{(k)} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 5x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(-2 + 2x_3^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

4/

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$x_1^{(1)} = -\frac{1}{4}(1+1) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{7}\left(-2 + 2\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right) = \frac{1}{7}(-4)$$

$$= -\frac{4}{7}.$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + \frac{16}{7}\right) = \frac{22}{7}.$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{22}{7} \end{pmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(2)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 5\left(-\frac{4}{7}\right) - \frac{22}{7}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{20}{7} - \frac{22}{7}\right)$$

$$= \frac{-5}{28}$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{7}\left(-2 + 2\left(\frac{-5}{28}\right) + \frac{22}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(-2 - \frac{10}{28} + \frac{22}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{56}{28} - \frac{10}{28} + \frac{88}{28}\right)$$

$$= \frac{1}{7}\left(\frac{22}{28}\right)$$

$$= \frac{11}{98}$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4\left(\frac{-5}{28}\right) - 4\cdot\frac{11}{98}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{20}{28} - \frac{44}{98}\right) = \frac{111}{98}$$

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{28} \\ \frac{11}{98} \\ \frac{111}{98} \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

Par identification : Pour tout $i \in [1..m]$.

$$\underbrace{a_{i1} x_1^{(k+1)} + \dots + a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)}}_{i-1} + a_{ii} x_i^{(k+1)}$$

$$= \underbrace{-a_{i,i+1} x_{i+1}^{(k)} - \dots - a_{im} x_m^{(k)}}_{m-i} + b_i$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

si $a_{ii} \neq 0$:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{j=2}^{m} a_{1j} x_j^{(k)} \right)$$

$$x_m^{(k+1)} = \frac{1}{a_{mm}} \left(b_m - \sum_{j=1}^{n-1} a_{mj} x_j^{(k+1)} \right)$$

Exercice :

Un exemple avec Gauss-Seidel

réponse :

$M_{GS} = D - E$

$$D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N_{GS} = F = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = ? \\ x_2^{(k+1)} = ? \\ x_3^{(k+1)} = ? \end{cases}$$

* $j = 1$:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{-4} \left(1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right)$$

$$= \frac{-1}{4} \left(1 - 5 x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \right)$$

* $j = 2$:

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7} \left(-2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} \right)$$

$$= \frac{1}{7} \left(-2 + 2 x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} \right).$$

* $j = 3$:

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} \left(2 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(2 - 4 x_1^{(k+1)} - 4 x_2^{(k+1)} \right)$$

Scanned with CamScanner

$$M = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$L_3 \leftarrow 14L_3 - 4L_2$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 28 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 18 & -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{2}{14} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{14}{28} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{18}{28} & -\frac{8}{28} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} + \frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{5 \times 18}{28} & -\frac{18-8}{28} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} & \frac{3}{14} \\ 0 & -\frac{45}{14} & -\frac{13}{14} \end{pmatrix}.$$

$$\det(M^{-1}N - \lambda I_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{5}{14} - \lambda & \frac{3}{14} \\ 0 & -\frac{45}{14} & -\frac{13}{14} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{14}\lambda \left(14\lambda^2 + 8\lambda + 5\right).$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 0,28 + i\,0,52.$

$\lambda_2 = 0,28 - i\,0,52.$

$\lambda_3 = 0.$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 0,59$

$\Rightarrow \rho(M^{-1}N) = 0,59 < 1.$

$\Rightarrow$ CVG

Scanned with CamScanner

3/ Méthode SOR:

Soit $w \in \mathbb{R}^*$

$$M_{SOR} = \frac{1}{w} D - E$$

$$N_{SOR} = \frac{1-w}{w} D + F$$

$$SOR \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^m \text{ donné} \\ \forall k \in \mathbb{N} \\ M_{SOR} x^{(k+1)} = N_{SOR} x^{(k)} + b \end{cases}$$

Rque:

Si $w = 1$ $\quad SOR = G.S$

Exercice:

A partir de $M_{SOR} x^{(k+1)} = N_{SOR} x^{(k)} + b$

Trouver une formule permettant de calculer $x_i^{(k+1)}$ $(\forall k \in \mathbb{N}, i = 1..m)$

$$x_i^{(k+1)} = w \hat{x}_i^{(k+1)} + (1-w) x_i^{(k)}$$

$$= \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1-w) x_i^{(k)}$$

réponse:

$$M_{SOR} = \frac{1}{w} D - E$$

$$= \frac{1}{w} \begin{pmatrix} a_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_{mm} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ -a_{21} & \ddots & \\ -a_{i1} & -a_{i,i-1} & 0 \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{m,m-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{w} & & & (0) \\ -a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{i1} & -a_{i,i-1} & & \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} & \frac{a_{mm}}{w} \end{pmatrix}$$

$$M_{SOR} x^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{w} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{i,i-1} & 0 \\ -a_{m1} & \cdots & a_{m,m-1} & \frac{a_{mm}}{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{w} x_1^{(k+1)} \\ -a_{21} x_1^{(k+1)} + \frac{a_{22}}{w} x_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ -a_{i1} x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} \\ \vdots \\ -a_{m1} x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{m,m-1} x_{m-1}^{(k+1)} + \frac{a_{mm}}{w} x_m^{(k+1)} \end{pmatrix}$$

$$N_{SOR} = \frac{1-w}{w} D + F$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ 0 & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{mm} \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$M_{SOR} x^{(k+1)} = N_{SOR} x^{(k)} + b$.

$\Rightarrow$ Par identification

$\forall i = 1..m$

$$a_{i1} x_i^{(k+1)} - \dots - a_{ii-1} x_{i-1}^{(k+1)} + \frac{a_{ii}}{w} x_i^{(k+1)} = \left(\frac{1-w}{w}\right) a_{ii} x_i^{(k)}.$$

on obtient finalement.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left[\frac{1-w}{w} a_{ii} x_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

$$= (1-w) x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

$$= (1-w) x_i^{(k)} + w \hat{x}_i^{(k+1)}.$$

$$\hat{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j^{(k)} \right].$$

Exercice.

$w = \frac{1}{2}$, Refaire le même exemple par SOR.

réponse.

$M_{SOR} = \frac{1}{w} D - E = \frac{2}{w} D - E$.

$N_{SOR} = \frac{1-w}{w} D + F = D + F$

$$M_{SOR} = 2 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 2 & 14 & 0 \\ +4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$N_{SOR} = D + F$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -5 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_1^{(k)} + \frac{1}{2} \hat{x}_1^{(k+1)}. \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(k)} + \frac{1}{2} \hat{x}_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{2} x_3^{(k)} + \frac{1}{2} \hat{x}_1^{(k+1)} \end{cases}$$

avec $\hat{x}_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} \right)$

$\hat{x}_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21} x_1^{(k+1)} - a_{23} x_3^{(k)} \right)$

$\hat{x}_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} \left(b_3 - a_{31} x_1^{(k+1)} - a_{32} x_2^{(k+1)} \right)$

Scanned with CamScanner

$\hat{x}_1^{(1)} \to x_1^{(1)} \to \hat{x}_2^{(1)} \to x_2^{(1)} \to \hat{x}_3^{(1)} \to x_3^{(1)}$

$\Rightarrow X^{(1)} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix}$

$\hat{x}_1^{(1)} = -\frac{1}{4}\left(1 - 5x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right)$.

$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}x_1^{(0)} + \frac{1}{2}\hat{x}_1^{(1)} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$

$\hat{x}_2^{(1)} = \frac{1}{7}\left(-2 - (-2)x_3^{(1)} - (-1)x_3^{(0)}\right)$

$= \frac{1}{7}\left(-2 + \frac{1}{2} + (-1)\right)$.

$= \frac{-5}{14}$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}x_2^{(0)} + \frac{1}{2}\hat{x}_2^{(1)}$

$= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times -\frac{5}{14} = -\frac{5}{28}$.

$\hat{x}_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(2 - 4 \times x_1^{(1)} - 4x_2^{(1)}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2 - 4 \times \frac{1}{4} - 4 \times -\frac{5}{28}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2 - 1 + \frac{20}{28}\right)$.

$= \frac{24}{28}$.

$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}x_3^{(0)} + \frac{1}{2}\hat{x}_2^{(1)}$

$= \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{-5}{14}\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{5}{28} = \frac{-19}{28}$.

$x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{5}{28} \\ \frac{-19}{28} \end{pmatrix}$

De la même façon on peut calculer $x^{(2)}$.

3/ la convergence :

$M_{SOR} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -2 & 14 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L_2 \leftarrow 4L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftarrow 7L_3 - L_2$

$\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 56 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 8 & -4 & 14 \end{pmatrix}$

$L_1 \leftarrow -\frac{1}{8}L_1$

$L_2 \leftarrow \frac{1}{56}L_2$.

$L_3 \leftarrow \frac{1}{56}L_3$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{56} & \frac{4}{56} & 0 \\ \frac{8}{56} & -\frac{4}{56} & \frac{14}{56} \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{56} & \frac{1}{14} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$H^{-1} N_{SSR} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{56} & \frac{1}{14} & 0 \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{14} & \frac{33}{56} & \frac{31}{189} \\ \frac{4}{7} & -\frac{17}{4} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

$$\det\left(H^{-1} N_{SSR}^{-H_3}\right)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{14} & \frac{33}{56} - \lambda & \frac{31}{189} \\ \frac{4}{7} & -\frac{17}{4} & \frac{2}{7} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)\left(\left(\frac{33}{56} - \lambda\right)\left(\frac{2}{7} - \lambda\right) + \frac{527}{756}\right)$$

$$- \frac{1}{14}\left(\frac{5}{8}\left(\frac{2}{7} - \lambda\right) + \frac{17}{32}\right)$$

$$+ \frac{4}{7}\left(\frac{155}{1512} - \frac{1}{8}\left(\frac{33}{56} - \lambda\right)\right)$$

Scanned with CamScanner